

**TIPO:** CURSO DE POSGRADO.

**NOMBRE:** TEORÍA GENERAL DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS.

**VIGENCIA:** Primer Cuatrimestre, 2024.

**DOCENTES RESPONSABLES:** Dr. Ing. Sergio Preidikman y Dr. Martín Pérez Segura  
Oficina 109; Departamento de Estructuras; Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales; Universidad Nacional de Córdoba; TE: (0351) 433-4145 Interno 35;  
e-mails: [spredikman@unc.edu.ar](mailto:spredikman@unc.edu.ar) y [mperezsegura@unc.edu.ar](mailto:mperezsegura@unc.edu.ar)

**PROFESIONALES A LOS QUE ESTÁ ORIENTADO:** Ingenieros Mecánicos, Aeronáuticos, Civiles, Electromecánicos, Electricistas, y Químicos. Licenciados en Matemática, Física y Química. Todo aquel profesional interesado en el Método de los Elementos Finitos y que satisfaga los requisitos descriptos en el ítem "PRE-REQUISITOS".

**PRE-REQUISITOS:** Tener conocimientos, a nivel de carrera de grado, en: Álgebra Lineal, Cálculo de Varias Variables, Métodos Numéricos, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales. Es recomendable tener experiencia previa en programación utilizando MATLAB®. Se entiende que lo que se presenta como "recomendable" no es excluyente. Sin embargo, el postulante que no posea esta experiencia previa deberá realizar un esfuerzo adicional, habida cuenta de la íntima relación con la temática de la asignatura. La aceptación de aquellos postulantes que no satisfagan alguna de las condiciones citadas anteriormente, quedará a criterio de los docentes responsables del dictado de la asignatura, previa evaluación de los antecedentes del postulante.

**JUSTIFICACIÓN Y OBJETIVOS:** Con el advenimiento de la computadora digital, los métodos numéricos se han convertido en una herramienta esencial para el científico moderno ya que permiten resolver casos que hasta hace muy poco tiempo eran prácticamente imposibles de resolver por métodos matemáticos tradicionales. Esta asignatura prepara al estudiante con las herramientas necesarias para resolver problemas que constituyen el estado del arte en las áreas de la física y la matemática aplicada, mecánica de los fluidos, transferencia de calor, termodinámica, mecánica estructural y electromagnetismo. Habiendo completado exitosamente la asignatura, el estudiante se habrá familiarizado con los conceptos fundamentales que conllevaron al desarrollo del Método de los Elementos Finitos. Además, contará con las herramientas teóricas y computacionales necesarias para programar el método y/o utilizar "software" de origen comercial.

Este curso introductorio al método de los elementos finitos, de un semestre de duración, sirve a dos propósitos:

- Como asignatura de postgrado para estudiantes en ciencias e ingeniería que necesitan utilizar el Método de los Elementos Finitos y/o software "enlatado" en sus investigaciones. Se trata de un curso fundamental o básico para un programa de postgrado interdisciplinario.
- Como asignatura de postgrado básico para estudiantes en ciencias e ingeniería que pretenden especializarse en el Método de los Elementos Finitos.

**DURACIÓN Y ORGANIZACIÓN:** 60 horas. Un total de 15 semanas de clases.

El total del tiempo se dedicará a clases teórico-prácticas, las que se desarrollarán en aula. El presente curso no requiere de trabajos de campo, gabinete o laboratorio, visitas o viajes de estudio.

Lugar de Clases: Aula 700 - Edificio de Graduados PB.

Horario: miércoles de 14:00 a 18:00 hs.

Fecha de inicio: 6 de marzo de 2024.

Fecha de finalización: 12 de junio de 2024.

**METODOLOGÍA DE DICTADO:** Se dictará una clase teórica semanal de 4 (cuatro) horas de duración. La misma se desarrollará en aula, con exposición oral, uso de pizarrón y de proyector multimedia.

Se fijarán horarios de consulta, fuera del horario de clases, de acuerdo a las posibilidades de los docentes responsables de la asignatura y de los estudiantes inscriptos.

**METODOLOGÍA DE EVALUACIÓN Y APROBACIÓN:**

La evaluación se realizará mediante: *i)* dos exámenes de carácter parcial, *ii)* un examen final integrador, *iii)* la confección de un programa de computadora (acompañado de un informe) que servirá para implementar los conocimientos adquiridos en el curso, y *iv)* trabajos prácticos, asistencia a clase, y participación activa en el salón de clases.

Los exámenes serán resueltos en forma individual durante horario de clases.

El proyecto de computadora/informe deberá ser realizado de manera individual por cada estudiante y deberá ser entregado en la fecha estipulada por el docente. No se aceptarán proyectos tardíos.

La nota final se calculará de la siguiente manera:

- 1er Examen Parcial = 20% de la nota final.
- 2do Examen Parcial = 20% de la nota final.
- Examen final integrador = 25% de la nota final.
- Informe que acompaña al programa de computadora = 25% de la nota final.
- Otros: Trabajos Prácticos, Asistencia a Clase, y Participación Activa en el Salón de Clases = 10 % de la nota final.

La asistencia a clases no es un requisito para aprobar el curso, aunque la misma es altamente recomendada.

**NECESIDADES DE INFRAESTRUCTURA:** Disponibilidad de un aula con pizarra y proyector multimedia.

**PROGRAMA ANALÍTICO RESUMIDO:**

1. Introducción
2. Problemas elípticos uni-dimensionales
3. Problemas elípticos bi-dimensionales
4. Polinomios continuos por tramos y el método de los elementos finitos
5. Convergencia y errores asociados al método de los elementos finitos
6. Integración numérica, estructuras de datos, e implementación computacional
7. Solución de las ecuaciones del método de los elementos finitos

**PROGRAMA ANALÍTICO DESARROLLADO:**

**Parte I – INTRODUCCIÓN**

Comentarios generales

Conceptos Básicos sobre el Método de los Elementos Finitos (FEM)

Necesidad de las formulaciones integrales y de soluciones débiles

Algunos conceptos matemáticos y formalismos: problemas de valores iniciales (IVP), problemas de valores en las fronteras (BVP), problemas de autovalores (EP), condiciones de borde Naturales (NBC) y condiciones de borde Esenciales (EBC)

Integrales ponderadas

Ejemplos y solución de problemas

**Parte II – PROBLEMAS ELÍPTICOS UNI-DIMENSIONALES**

PROBLEMAS DE VALORES EN LAS FRONTERAS DE SEGUNDO ORDEN

Pasos básicos para el análisis mediante el Método de los Elementos Finitos

Formulación débil de un problema modelo unidimensional

Formulación de Galerkin de un problema modelo unidimensional

Discretización del dominio, Derivación de las ecuaciones para cada elemento, Conectividad entre elementos, Imposición de las condiciones de borde, Solución de las ecuaciones, Post-procesamiento de la solución

Aplicaciones: Transferencia de calor, Mecánica de los fluidos, y Mecánica de sólidos

Ejemplos y solución de problemas

PROBLEMAS DE VALORES EN LAS FRONTERAS DE CUARTO ORDEN

Flexión de vigas como ejemplo de un BVP de cuarto orden

Elemento basado en la teoría de vigas de Euler-Bernoulli; Ecuaciones gobernantes

Discretización del dominio, Derivación de las ecuaciones para cada elemento, Ensamble de las ecuaciones, Imposición de las condiciones de borde, Solución de las ecuaciones, y Post-procesamiento de la solución

Ejemplos y solución de problemas

**Parte III – PROBLEMAS ELÍPTICOS BI-DIMENSIONALES**

Repaso de algunas fórmulas de cálculo vectorial

Problemas de valores en las fronteras

Modelado de problemas bi-dimensionales

La ecuación de Poisson: formulación débil

Discretización mediante el FEM: El modelo de Elementos Finitos, Funciones de interpolación, Evaluación de las matrices de cada elemento, Ensamble de las ecuaciones, Post-procesamiento de los resultados

Algunos comentarios sobre generación de mallas e imposición de las condiciones de borde: Discretización del dominio, Generación automática de los datos, Imposición de las condiciones de borde

Aplicaciones: Transferencia de calor, Mecánica de los fluidos, y Mecánica de sólidos

Ejemplos y solución de problemas

**Parte IV – POLINOMIOS CONTINUOS POR TRAMOS Y EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS**

Funciones continuas por tramos definidas en mallas con elementos triangulares

Elementos Lagrangenianos cuadráticos triangulares

Elementos Lagrangenianos cúbicos triangulares

Elementos Lagrangenianos de orden arbitrario triangulares

Otros elementos: rectángulos, cuadriláteros, y Serendípitos

Elementos Isoparamétricos; “Librerías” de elementos y funciones de interpolación

Ejemplos y solución de problemas

**Parte V – CONVERGENCIA Y ERRORES ASOCIADOS AL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS**

Aproximación de funciones suaves mediante funciones continuas por tramos  
El refinamiento “estándar” de una triangulación  
Familia de triangulaciones “No-degeneradas”  
Aproximación mediante funciones lineales continuas por tramos  
Aproximación mediante polinomios continuos por tramos  
Medidas de error: Convergencia de la solución en el sentido de la “norma energética” y Convergencia de la solución en el sentido de la norma  $L^2$   
Ejemplos y solución de problemas

### **Parte VI – INTEGRACIÓN NUMÉRICA, ESTRUCTURAS DE DATOS, E IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL**

Formulaciones Isoparamétricas e Integración Numérica  
Coordenadas naturales  
Aproximación de la geometría  
Formulación Subparamétrica, Isoparamétrica, y Superparamétrica  
Integración numérica: Transformación de coordenadas, Integración sobre un elemento “maestro” rectangular, e Integración sobre un elemento “maestro” triangular; Cuadratura de Gauss sobre elementos triangulares y rectangulares  
Implementación computacional; Ensamblaje de la matriz de rigidez; Ensamblaje del vector de cargas: condiciones de borde esenciales y naturales no-homogéneas  
Estructura de datos de la malla: lista de nudos, lista de bordes, lista de grados de libertad, y lista de elementos; La matriz de conectividades  
Implementación en MATLAB

### **Parte VII – SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS**

Métodos directos para la solución de sistemas de ecuaciones lineales “sparse”  
La factorización de Cholesky para matrices definidas positivas; La factorización de Cholesky para matrices densas; La factorización de Cholesky para matrices con estructura de banda  
Factorización general para matrices “sparse”  
Métodos iterativos: Gradientes conjugados (CG)  
El método CG; El algoritmo CG; Convergencia del algoritmo CG  
Bases “jerárquicas” para espacios de elementos finitos; Bases “jerárquicas” para triángulos Lagrangeanos lineales; Relación entre las matrices de rigidez correspondientes a bases “jerárquicas” y a bases “nodales”; Bases “jerárquicas” y el método CG  
El método CG preconditionado; Implementación utilizando MATLAB; Ejercicios  
Métodos iterativos clásicos: Jacobi, Gauss-Seidel, SOR, SOR-simétrico, y CG con preconditionamiento SSOR; Implementación utilizando MATLAB; Ejercicios  
Método “Multigrid”; Iteraciones estacionarias como suavizadores; Algoritmo de corrección; El método “multigrid V-cycle”, “W-cycles”, y “ $\mu$ -cycles”; Método “full multigrid”; Implementación utilizando MATLAB; Ejercicios

### **BIBLIOGRAFÍA:**

1. R. C. Batra, *An Introduction to the Finite Element Method*, Class Notes, ESM 5734, Department of Engineering Science & Mechanics, Virginia Polytechnic Institute & State University, 2011.
2. J. N. Reddy, *Introduction to the Finite Element Method*, 4<sup>th</sup> Edition. McGraw-Hill Education, New York, USA, 2019. ISBN-13: 978-9390385270.

3. Thomas J. R. Hughes, *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. (Dover Civil and Mechanical Engineering) Dover Publications, Dover Publications, Inc., 31 East 2nd Street, Mineola, N.Y 11501, USA, 2000. ISBN-13: 978-0486411811.
4. Leszek F. Demkowicz, *Mathematical Theory of Finite Elements*. (Computational Science & Engineering) Society for Industrial and Applied Mathematics, 3600 University City Science Center, Philadelphia, PA 19104-2688, USA, 2023. ISBN-13: 978-1-61197-772-1.
5. Mark S. Gockenbach, *Understanding and Implementing the Finite Element Method*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 3600 University City Science Center, Philadelphia, PA 19104-2688, USA, 2006. ISBN-13: 978-0898716146.
6. Saad A. Ragab and Hassan E. Fayed, *Introduction to Finite Element Analysis for Engineers*. CRC Press/Taylor & Francis Group, 6000 Broken Sound Parkway NW, Suite 300, Boca Raton, FL 33487-2742, USA, 2018. ISBN-13: 978-1138030176.

#### REFERENCIAS PARA LECTURA ADICIONAL:

1. Robert D. Cook, David S. Malkus, Michael E. Plesha, and Robert J. Witt, *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 4<sup>th</sup> Edition. John Wiley & Sons, Inc., 111 River Street, Hoboken, NJ 07030, USA, 2002. ISBN-13: 978-0471356059.
2. I. Babuska, *Finite Elements: An Introduction to the Method and Error Estimation*, Oxford University Press, 2010. ISBN-13: 978-0198506690.
3. T. Belytschko and J. Fish, *First Course in Finite Elements*, John Wiley & Sons, Incorporated, New York, 2007. ISBN-13: 978-0470035801.
4. Dietrich Braess, *Finite Elements: Theory, Fast Solvers, and Applications in Solid Mechanics*, 3<sup>rd</sup> Edition. Cambridge University Press, 2011, ISBN-13: 978-0415061391.
5. M. Ainsworth and J. T. Oden, *A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 2000. ISBN-13: 978-0471294115.
6. Daryl L. Logan, *A First Course in the Finite Element Method*, Enhanced Sixth Edition, SI Version. Cengage Learning, Inc., 200 Pier 4 Boulevard, Boston, MA 02210, USA 2023. ISBN-13: 978-0357676431.
7. Peter I. Kattan, *MATLAB Guide to Finite Elements: An Interactive Approach*, 2<sup>nd</sup> Edition, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2008. ISBN-13: 978-3540706977.
8. Antonio J. M. Ferreira and Nicholas Fantuzzi, *MATLAB Codes for Finite Element Analysis: Solids and Structures*, 2<sup>nd</sup> Edition, (Solid Mechanics and Its Applications, 157) Springer Nature, Switzerland AG, 2020. ISBN-13: 978-3030479510.
9. Klaus-Jürgen Bathe, *Finite Element Procedures*, 2<sup>nd</sup> Edition. Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, New Jersey 07458, USA, 2014. ISBN-13: 978-0979004957.
10. T. Belytschko, W. K. Liu, B. Moran, and K. Elkhodary, *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*, 2<sup>nd</sup> Edition, John Wiley and Sons Inc., New York, 2014. ISBN-13: 978-1118632703.
11. G. Dasgupta, *Finite Element Concepts: A Closed-Form Algebraic Development*, Springer Science, New York, 2018. ISBN: 978-1-4939-7421-4. DOI: 10.1007/978-1-4939-7423-8.
12. G. D. C. Dhondt, *Finite Element Method for Three-dimensional Thermomechanical Applications*, John Wiley and Sons Inc., New York, 2004. ISBN-13: 978-0470857526.
13. J. O. Dow, *A Unified Approach to The Finite Element Method and Error Analysis Procedures*, Academic Press, London, 1999. ISBN-13: ISBN: 978-0080543420.

14. E. Carrera, M. Cinefra, M. Petrolo, and E. Zappino, *Finite Element Analysis of Structures through Unified Formulation*, John Wiley and Sons Inc., New York, 2014. ISBN-13: 978-1119941217.
15. J. Tinsley Oden and J. N. Reddy, *An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements*. (Dover Books on Engineering) Dover Publications, Dover Publications, Inc., 31 East 2nd Street, Mineola, N.Y 11501, USA, 2011. ISBN-13: 978-0486462998.
16. K. K. Gupta and J. L. Meek, *Finite Element Multidisciplinary Analysis*, 2<sup>nd</sup> Edition, AIAA Education Series, 2003. ISBN-13: 978-1563475801.
17. Jian-Ming Jin, *The Finite Element Method in Electromagnetics*, 3<sup>rd</sup> Edition, Wiley-IEEE Press, 2014. ISBN-13: 978-1118571361.
18. G. R. Liu, and N. T. Trung, *Smoothed Finite Element Methods*, CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton, 2016. ISBN-13: 978-1439820285.
19. Erian A. Baskharone, *The Finite Element Method with Heat Transfer and Fluid Mechanics Applications*, Cambridge University Press, 2014. ISBN-13: 978-1139626668.
20. Singiresu S. Rao, *Finite Element Method in Engineering*, 6<sup>th</sup> Edition, Butterworth-Heinemann, 50 Hampshire Street, 5th Floor, Cambridge, MA 02139, USA, 2018. ISBN-13: 978-0128117682.
21. J. N. Reddy, *Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics*, 3<sup>rd</sup> Edition, John Wiley and Sons Inc., New York, USA, 2017. ISBN-13: 978-1119087373.
22. J. N. Reddy, *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis: with applications to heat transfer, fluid mechanics, and solid mechanics*, 2<sup>nd</sup> Edition, Oxford University Press, 2015. ISBN-13: 978-0199641758.
23. Irwin H. Shames and Clive L. Dym, *Energy and Finite Element Methods in Structural Mechanics*, CRC Press/Taylor & Francis, New York, NY, USA, 1996. ISBN-13: 978-0891169420.
24. Gilbert Strang and George Fix, *An Analysis of the Finite Element Method*, 2<sup>nd</sup> Edition, Wellesley-Cambridge Press, 2008. ISBN-13: 978-0980232707.
25. O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor, *The Finite Element Method – 4th Edition – Volume 1: Basic Formulation and Linear Problems*, McGraw Hill, Inc., New York, 1989. ISBN-13: 978-0070841741.
26. O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor, *The Finite Element Method – 4th Edition – Volume 2: Solid and Fluid Mechanics, Dynamics, and Non-linearity*, McGraw Hill, Inc., New York, 1991. ISBN-13: 978-0070841758.

#### COMENTARIOS:

1. Notas de clase relativas a parte del material a cubrir en el curso serán provistas por los profesores responsables.
2. Software, como por ejemplo MATLAB y MAPLE, será utilizado para llevar a cabo simulaciones numéricas y simbólicas.